Geometrització d'espais de valoracions

Enric Nart, Josnei Novacoski

Seminari Cargols

Lleida, 22 d'octubre de 2022

Espais de valoracions

Fixem una valoració v sobre un cos K

$$\mathbb{V} = \{\mu \ \text{ valoració sobre } K(X), \quad \mu_{|K} \sim v\} \big/ \sim$$

Ordre parcial $\qquad \mu \leq \nu \quad \Longleftrightarrow \quad \mu(f) \leq \nu(f), \quad \forall f \in K[X]$

Espais de valoracions

Fixem una valoració v sobre un cos K

$$\mathbb{V} = \left\{\mu \;\text{ valoració sobre } K(X), \quad \mu_{|K} \sim v\right\} \Big/ \sim$$

Ordre parcial $\qquad \mu \leq \nu \quad \Longleftrightarrow \quad \mu(f) \leq \nu(f), \quad \forall f \in K[X]$

Mac Lane, Spivakovsky, Vaquié, Berkovich, ...

Alberich-Guàrdia-Nart-Roé
Valuative trees over valued fields, J. Algebra 2023

Espais de valoracions

Fixem una valoració v sobre un cos K

$$\mathbb{V} = \left\{\mu \;\text{ valoració sobre } K(X), \quad \mu_{|K} \sim v\right\} \Big/ \sim$$

Ordre parcial $\quad \mu \le \nu \iff \mu(f) \le \nu(f), \quad \forall f \in K[X]$

Mac Lane, Spivakovsky, Vaquié, Berkovich, ...

Alberich-Guàrdia-Nart-Roé
Valuative trees over valued fields, J. Algebra 2023

Conjectura de Benguș-Lasnier (2021)
Existeix una aplicació bijectiva $\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{V}$, $\mathbb{D}$ espai de *"diskoids"*

Desigualtat d'Abhyankar

Siguin $\Gamma = v(K^*)$, k el cos residual. Per a tota $\mu \in \mathbb{V}$:

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\Gamma_\mu/\Gamma) + \operatorname{trdeg}(k_\mu/k) \leq 1$$

Això permet distingir tres classes de valoracions:

Desigualtat d'Abhyankar

Siguin $\Gamma = v(K^*)$, k el cos residual. Per a tota $\mu \in \mathbb{V}$:

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\Gamma_\mu/\Gamma) \ + \ \mathrm{trdeg}(k_\mu/k) \ \le \ 1$$

Això permet distingir tres classes de valoracions:

$\dim_{\mathbb{Q}}(\Gamma_\mu/\Gamma) = 0, \quad \mathrm{trdeg}(k_\mu/k) = 0$ **algebraiques**

$\dim_{\mathbb{Q}}(\Gamma_\mu/\Gamma) = 0, \quad \mathrm{trdeg}(k_\mu/k) = 1$ **residu transcendent**

$\dim_{\mathbb{Q}}(\Gamma_\mu/\Gamma) = 1, \quad \mathrm{trdeg}(k_\mu/k) = 0$ **valor transcendent**

Desigualtat d'Abhyankar

Siguin $\Gamma = v(K^*)$, k el cos residual. Per a tota $\mu \in \mathbb{V}$:

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\Gamma_\mu/\Gamma) \; + \; \mathrm{trdeg}(k_\mu/k) \; \le \; 1$$

Això permet distingir tres classes de valoracions:

$\dim_{\mathbb{Q}}(\Gamma_\mu/\Gamma) = 0$, $\mathrm{trdeg}(k_\mu/k) = 0$ **algebraiques**

$\dim_{\mathbb{Q}}(\Gamma_\mu/\Gamma) = 0$, $\mathrm{trdeg}(k_\mu/k) = 1$ **residu transcendent**

$\dim_{\mathbb{Q}}(\Gamma_\mu/\Gamma) = 1$, $\mathrm{trdeg}(k_\mu/k) = 0$ **valor transcendent**

$$\mathbb{V} \; = \; \mathbb{V}_\infty \; \sqcup \; \mathbb{V}_{\mathrm{rt}} \; \sqcup \; \mathbb{V}_{\mathrm{vt}}$$

K algebraicament tancat

Γ **grup divisible** : $\quad \forall\gamma \in \Gamma, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists!\, \alpha \in \Gamma \ \text{ tq } \ n\alpha = \gamma$

K algebraicament tancat

Γ **grup divisible**: $\quad \forall \gamma \in \Gamma, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists!\, \alpha \in \Gamma$ tq $n\alpha = \gamma$

Quasi-talls de Γ

$$\mathrm{Qcuts}(\Gamma) = \left\{ \delta = \left(\delta^L, \delta^R\right) \;\middle|\; \delta^L \leq \delta^R, \quad \delta^L \cup \delta^R = \Gamma \right\}$$

K algebraicament tancat

Γ **grup divisible**: $\quad \forall \gamma \in \Gamma, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists!\, \alpha \in \Gamma$ tq $\; n\alpha = \gamma$

Quasi-talls de Γ

$$\mathrm{Qcuts}(\Gamma) = \left\{ \delta = \left(\delta^L, \delta^R\right) \;\middle|\; \delta^L \le \delta^R, \quad \delta^L \cup \delta^R = \Gamma \right\}$$

Tenim dues opcions:

- $\delta^L \cap \delta^R = \emptyset \qquad \delta$ **tall** de Γ: $\quad \delta \in \mathrm{Cuts}(\Gamma) \subset \mathrm{Qcuts}(\Gamma)$
- $\delta^L \cap \delta^R = \{\gamma\} \qquad \delta^L = \Gamma_{\le\gamma}, \;\; \delta^R = \Gamma_{\ge\gamma}$ **quasi-tall principal**

$$\mathrm{Qcuts}(\Gamma) \; = \; \Gamma \; \sqcup \; \mathrm{Cuts}(\Gamma)$$

Identifiquem els elements de Γ amb els quasi-talls principals que determinen

Completitud de Qcuts(Γ)

Qcuts(Γ) és un conjunt totalment ordenat, amb l'ordre:

$$\delta \leq \epsilon \iff \delta^L \subseteq \epsilon^L, \quad \delta^R \supseteq \epsilon^R$$

Completitud de Qcuts(Γ)

Qcuts(Γ) és un conjunt totalment ordenat, amb l'ordre:

$$\delta \leq \epsilon \iff \delta^L \subseteq \epsilon^L, \quad \delta^R \supseteq \epsilon^R$$

Qcuts(Γ) és **complet** per a la topologia de l'ordre. És a dir, tot subconjunt no buit té un ínfim i un suprem

$$-\infty = \min\left(\mathrm{Qcuts}(\Gamma)\right) = \left(\emptyset, \Gamma\right), \quad \infty^- = \max\left(\mathrm{Qcuts}(\Gamma)\right) = \left(\Gamma, \emptyset\right)$$

Completitud de Qcuts(Γ)

Qcuts(Γ) és un conjunt totalment ordenat, amb l'ordre:

$$\delta \leq \epsilon \iff \delta^L \subseteq \epsilon^L, \quad \delta^R \supseteq \epsilon^R$$

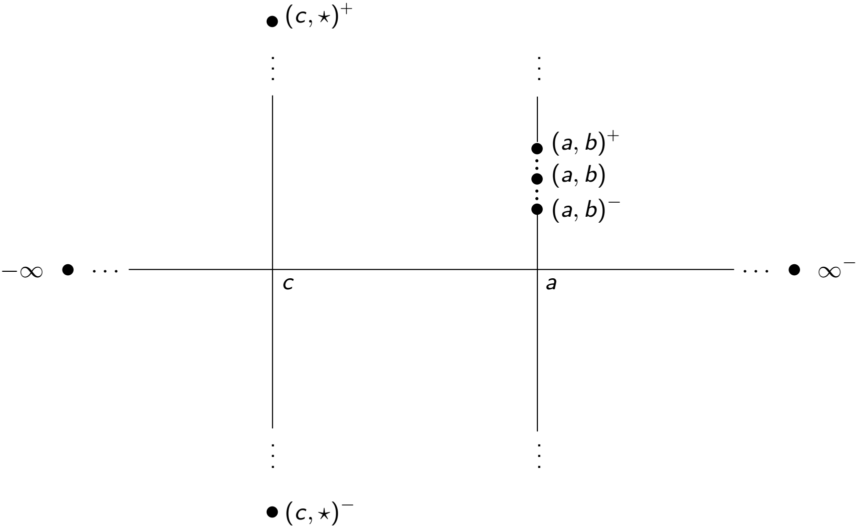
Qcuts(Γ) és **complet** per a la topologia de l'ordre. És a dir, tot subconjunt no buit té un ínfim i un suprem

$$-\infty = \min\left(\mathrm{Qcuts}(\Gamma)\right) = (\emptyset, \Gamma)\,, \quad \infty^{-} = \max\left(\mathrm{Qcuts}(\Gamma)\right) = (\Gamma, \emptyset)$$

Tot $\gamma \in \Gamma$ determina dos talls principals γ^-, γ^+ que fan de **predecessor immediat** i **successor immediat** de γ:

$$\gamma^- = (\Gamma_{<\gamma}, \Gamma_{\geq\gamma}) \ < \ \gamma = (\Gamma_{\leq\gamma}, \Gamma_{\geq\gamma}) \ < \ \gamma^+ = (\Gamma_{\leq\gamma}, \Gamma_{>\gamma})$$

Exemple: $\Gamma = \mathbb{R}^2_{\text{lex}}$



Grup associat a un quasi-tall

Per a tot $\delta \in \Gamma$ definim $\Gamma(\delta) = \Gamma$

Per a tot $\delta \in \mathrm{Cuts}(\Gamma)$ definim $\Gamma(\delta) = x_\delta \mathbb{Z} \oplus \Gamma$, on x_δ és una indeterminada. En aquest cas, hi ha un únic ordre (total) a $\Gamma(\delta)$, determinat per la condició

$$\delta^L < x_\delta < \delta^R$$

Grup associat a un quasi-tall

Per a tot $\delta \in \Gamma$ definim $\Gamma(\delta) = \Gamma$

Per a tot $\delta \in \mathrm{Cuts}(\Gamma)$ definim $\Gamma(\delta) = x_\delta\mathbb{Z} \oplus \Gamma$, on x_δ és una indeterminada. En aquest cas, hi ha un únic ordre (total) a $\Gamma(\delta)$, determinat per la condició

$$\delta^L \; < \; x_\delta \; < \; \delta^R$$

En efecte, si (per exemple) $m > n$, tenim:

$$\begin{aligned}
\alpha + n\,x_\delta \leq \beta + m\,x_\delta \quad &\iff \quad \alpha - \beta \leq (m-n)\,x_\delta \\
&\iff \quad \frac{\alpha-\beta}{m-n} \leq x_\delta \quad \iff \quad \frac{\alpha-\beta}{m-n} \in \delta^L
\end{aligned}$$

Valoracions amb centre a K i un quasi-tall per radi

$$(a,\delta)\in K\times \mathrm{Qcuts}(\Gamma) \quad \rightsquigarrow \quad \omega := \omega(a,\delta)\in \mathbb{V}$$

Conveni: Si $\delta\in\Gamma$, denotem $x_\delta=\delta$

$$\omega\left(\sum_n a_n(X-a)^n\right) = \min_n\{v(a_n)+n\,x_\delta\}$$

Valoracions amb centre a K i un quasi-tall per radi

$$(a,\delta)\in K\times \mathrm{Qcuts}(\Gamma) \quad\rightsquigarrow\quad \omega:=\omega(a,\delta)\in\mathbb{V}$$

Conveni: Si $\delta\in\Gamma$, denotem $x_\delta=\delta$

$$\omega\left(\sum_n a_n(X-a)^n\right) \;=\; \min_n\left\{v(a_n)+n\,x_\delta\right\}$$

Clarament, $\Gamma_\omega=\Gamma(\delta)$. D'altra banda,

- $\delta\in\mathrm{Cuts}(\Gamma) \implies \omega$ té valor transcendent
- $\delta\in\Gamma \implies \omega$ té residu transcendent:

$(u\in K,\ v(u)=\delta \implies (X-a)/u$ té residu transcendent sobre $k)$

Valoracions amb centre a K i un quasi-tall per radi

$$(a,\delta) \in K \times \mathrm{Qcuts}(\Gamma) \quad \rightsquigarrow \quad \omega := \omega(a,\delta) \in \mathbb{V}$$

Conveni: Si $\delta \in \Gamma$, denotem $x_\delta = \delta$

$$\omega\left(\sum_n a_n (X-a)^n\right) = \min_n \{v(a_n) + n\, x_\delta\}$$

Clarament, $\Gamma_\omega = \Gamma(\delta)$. D'altra banda,

- $\delta \in \mathrm{Cuts}(\Gamma) \implies \omega$ té valor transcendent
- $\delta \in \Gamma \implies \omega$ té residu transcendent:

$(u \in K,\ v(u) = \delta \implies (X-a)/u$ té residu transcendent sobre $k)$

Teorema

Tota valoració transcendent de $\mathbb{V}$ és d'aquesta forma

Geometrització ? Boles amb un quasi-tall per radi

$(a, \delta) \in K \times \mathrm{Qcuts}(\Gamma) \quad \rightsquigarrow$

$$B(a, \delta) = \{c \in K \mid v(c - a) \geq x_\delta\} \subset K$$

$(a, \delta) \in K \times \mathrm{Qcuts}(\Gamma) \quad \rightsquigarrow$

$$B(a, \delta) = \{c \in K \mid v(c - a) \geq x_\delta\} \subset K$$

- $\gamma \in \Gamma \implies B(a, \gamma) = \{c \in K \mid v(c - a) \geq \gamma\}$
- $B(a, -\infty) = K$
- $B(a, \infty^-) = \{a\}$
- $B(a, \gamma^-) = B(a, \gamma) \qquad (!!)$
- $B(a, \gamma^+) = B^\circ(a, \gamma) = \{c \in K \mid v(c - a) > \gamma\}$

$(a, \delta) \in K \times \mathrm{Qcuts}(\Gamma) \quad \rightsquigarrow$

$$B(a, \delta) = \{c \in K \mid v(c - a) \geq x_\delta\} \subset K$$

- $\gamma \in \Gamma \implies B(a, \gamma) = \{c \in K \mid v(c - a) \geq \gamma\}$
- $B(a, -\infty) = K$
- $B(a, \infty^-) = \{a\}$
- $B(a, \gamma^-) = B(a, \gamma) \qquad (!!)$
- $B(a, \gamma^+) = B^\circ(a, \gamma) = \{c \in K \mid v(c - a) > \gamma\}$

Proposició

$\omega(a, \delta) = \omega(b, \epsilon) \iff B(a, \delta) = B(b, \epsilon), \quad \delta = \epsilon$

Espais de boles ultramètriques

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}_\Gamma &= \{B(a,\gamma) \mid a \in K,\ \gamma \in \Gamma\} \\
\mathbb{B}_{\mathrm{cut}} &= \{B(a,\delta) \mid a \in K,\ \delta \in \mathrm{Cuts}(\Gamma)\} \\
\mathbb{B}_{\mathrm{qcut}} &= \{B^\bullet(a,\delta) = (B(a,\delta),\delta) \mid a \in K,\ \delta \in \mathrm{Qcuts}(\Gamma)\}
\end{aligned}$$

Espais de boles ultramètriques

$$
\begin{aligned}
\mathbb{B}_\Gamma &= \{B(a,\gamma) \mid a \in K,\ \gamma \in \Gamma\} \\
\mathbb{B}_{\mathrm{cut}} &= \{B(a,\delta) \mid a \in K,\ \delta \in \mathrm{Cuts}(\Gamma)\} \\
\mathbb{B}_{\mathrm{qcut}} &= \{B^\bullet(a,\delta) = (B(a,\delta),\delta) \mid a \in K,\ \delta \in \mathrm{Qcuts}(\Gamma)\}
\end{aligned}
$$

Són conjunts totalment ordenats:

$$B(a,\delta) \leq B(b,\epsilon) \iff B(a,\delta) \supseteq B(b,\epsilon)$$

$$B^\bullet(a,\delta) \leq B^\bullet(b,\epsilon) \iff B(a,\delta) \leq B(b,\epsilon), \quad \delta \leq \epsilon$$

Espais de boles ultramètriques

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}_\Gamma &= \{B(a,\gamma) \mid a \in K,\ \gamma \in \Gamma\} \\
\mathbb{B}_{\mathrm{cut}} &= \{B(a,\delta) \mid a \in K,\ \delta \in \mathrm{Cuts}(\Gamma)\} \\
\mathbb{B}_{\mathrm{qcut}} &= \{B^\bullet(a,\delta) = (B(a,\delta),\delta) \mid a \in K,\ \delta \in \mathrm{Qcuts}(\Gamma)\}
\end{aligned}$$

Són conjunts totalment ordenats:

$$B(a,\delta) \le B(b,\epsilon) \quad \Longleftrightarrow \quad B(a,\delta) \supseteq B(b,\epsilon)$$

$$B^\bullet(a,\delta) \le B^\bullet(b,\epsilon) \quad \Longleftrightarrow \quad B(a,\delta) \le B(b,\epsilon), \quad \delta \le \epsilon$$

Teorema

Isomorfisme de posets: $\mathbb{B}_{\mathrm{qcut}} \longrightarrow \mathbb{V}_{\mathrm{rt}} \sqcup \mathbb{V}_{\mathrm{vt}}, \quad B^\bullet(a,\delta) \longmapsto \omega(a,\delta)$
que restringeix a isomorfismes $\mathbb{B}_\Gamma \simeq \mathbb{V}_{\mathrm{rt}}$ (APZ1988), $\mathbb{B}_{\mathrm{cut}} \simeq \mathbb{V}_{\mathrm{vt}}$

Valoracions algebraiques

$\mathcal{N}_\infty$ conjunt de **nius de boles** amb intersecció buida:

$$(B_i)_{i\in I}\,,\ \ B_i \in \mathbb{B}_\Gamma, \quad B_i \supsetneq B_j \ \text{ si } \ i<j, \quad \bigcup_{i\in I} B_i = \emptyset$$

on I és un conjunt totalment ordenat

Valoracions algebraiques

$\mathcal{N}_\infty$ conjunt de **nius de boles** amb intersecció buida:

$$(B_i)_{i\in I}\,,\ \ B_i \in \mathbb{B}_\Gamma, \quad B_i \supsetneq B_j \ \text{ si } \ i<j, \quad \bigcup_{i\in I} B_i = \emptyset$$

on I és un conjunt totalment ordenat

Exemple $K=\overline{\mathbb{Q}}$, v extensió de ord_p. Considerem un nombre p-àdic transcendent sobre $\mathbb{Q}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} m_n p^{\ell_n} \in \mathbb{Q}_p, \quad 0<m_n<p, \quad a_n=\sum_{k<n} m_k p^{\ell_k}$$

Aleshores, el niu de boles $(B(a_n,\ell_n))_{n\in\mathbb{N}}$ té intersecció buida

Valoracions algebraiques

$\mathcal{N}_\infty$ conjunt de **nius de boles** amb intersecció buida:

$$(B_i)_{i\in I}\,,\;\; B_i\in\mathbb{B}_\Gamma, \quad B_i\supsetneq B_j \;\text{ si }\; i<j, \quad \bigcup_{i\in I} B_i=\emptyset$$

on I és un conjunt totalment ordenat

Exemple $K=\overline{\mathbb{Q}}$, v extensió de ord_p. Considerem un nombre p-àdic transcendent sobre $\mathbb{Q}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} m_n p^{\ell_n}\in\mathbb{Q}_p, \quad 0<m_n<p, \quad a_n=\sum_{k<n} m_k p^{\ell_k}$$

Aleshores, el niu de boles $(B(a_n,\ell_n))_{n\in\mathbb{N}}$ té intersecció buida

$\mathbb{B}_\infty := \mathcal{N}_\infty/\sim$ on: $(B_i)_{i\in I}\sim(C_j)_{j\in J} \iff$ mutuament cofinals

Teorema

Bijecció: $\mathbb{B}_\infty \longrightarrow \mathbb{V}_\infty$, $(B_i)_{i\in I}\longmapsto \lim_{i\in I}\omega_{B_i}$ (APZ 1990)

Geometrització global

Considerem un ordre global a $\mathbb{B} := \mathbb{B}_\infty \sqcup \mathbb{B}_{\mathsf{qcut}}$

Els elements de $\mathbb{B}_\infty$ són necessariament maximals

$B^\bullet = (B, \delta) \;\leq\; \mathcal{B} = (B_i)_{i\in I} \quad\Longleftrightarrow\quad B \leq B_i$ per a algun $i \in I$

Geometrització global

Considerem un ordre global a $\mathbb{B} := \mathbb{B}_\infty \sqcup \mathbb{B}_{\mathsf{qcut}}$

Els elements de $\mathbb{B}_\infty$ són necessariament maximals

$B^\bullet = (B, \delta) \leq \mathcal{B} = (B_i)_{i \in I} \iff B \leq B_i$ per a algun $i \in I$

Teorema

$\mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{V}$ isomorfisme de posets

Geometrització global

Considerem un ordre global a $\mathbb{B} := \mathbb{B}_\infty \sqcup \mathbb{B}_{\mathrm{qcut}}$

Els elements de $\mathbb{B}_\infty$ són necessariament maximals

$B^\bullet = (B, \delta) \le \mathcal{B} = (B_i)_{i \in I} \iff B \le B_i$ per a algun $i \in I$

Teorema

$\mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{V}$ isomorfisme de posets

Node arrel $\omega_{-\infty} := \omega(a, -\infty) = \omega(b, -\infty)$

Fulles finites $\omega(a, \infty^-)$, $a \in K$

Fulles infinites $\mathbb{B}_\infty$

Geometrització global

Considerem un ordre global a $\mathbb{B} := \mathbb{B}_\infty \sqcup \mathbb{B}_{\text{qcut}}$

Els elements de $\mathbb{B}_\infty$ són necessariament maximals

$B^\bullet = (B, \delta) \le \mathcal{B} = (B_i)_{i \in I} \iff B \le B_i$ per a algun $i \in I$

Teorema

$\mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{V}$ isomorfisme de posets

Node arrel $\omega_{-\infty} := \omega(a, -\infty) = \omega(b, -\infty)$

Fulles finites $\omega(a, \infty^-)$, $a \in K$

Fulles infinites $\mathbb{B}_\infty$

$$\left[\omega_{-\infty}, \omega(a, \infty^-)\right] = \{\omega(a, \delta) \mid \delta \in \mathrm{Qcuts}(\Gamma)\}$$

El cas general: descens galoisià

Fixem una extensió $\overline{v}$ de v a $\overline{K}$. Considerem la **henselització** $K \subset K^h \subset K^{\mathrm{sep}} \subset \overline{K}$, cos fix del grup de descomposició:

$$G = \{\sigma \in \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K) \mid \overline{v} \circ \sigma = \overline{v}\}$$

El cas general: descens galoisià

Fixem una extensió $\overline{v}$ de v a $\overline{K}$. Considerem la **henselització** $K \subset K^h \subset K^{\mathrm{sep}} \subset \overline{K}$, cos fix del grup de descomposició:

$$G = \{\sigma \in \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K) \mid \overline{v} \circ \sigma = \overline{v}\}$$

G opera sobre les boles i sobre les valoracions:

$$\sigma\,(B(a,\delta)) = B(\sigma(a),\delta), \qquad \omega(a,\delta)\circ\sigma = \omega(\sigma^{-1}(a),\delta)$$

Denotem per B_G l'òrbita de B sota l'acció de G. Clarament:

$$(\omega_B)_{|K^h(X)} = (\omega_C)_{|K^h(X)} \iff B_G = C_G$$

El cas general: descens galoisià

Fixem una extensió $\overline{v}$ de v a $\overline{K}$. Considerem la **henselització** $K \subset K^h \subset K^{\text{sep}} \subset \overline{K}$, cos fix del grup de descomposició:

$$G = \{\sigma \in \text{Gal}(K^{\text{sep}}/K) \mid \overline{v} \circ \sigma = \overline{v}\}$$

G opera sobre les boles i sobre les valoracions:

$$\sigma\left(B(a,\delta)\right) = B(\sigma(a),\delta), \qquad \omega(a,\delta) \circ \sigma = \omega(\sigma^{-1}(a),\delta)$$

Denotem per B_G l'òrbita de B sota l'acció de G. Clarament:

$$(\omega_B)_{|K^h(X)} = (\omega_C)_{|K^h(X)} \iff B_G = C_G$$

Teorema

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{D} = B/G & \xrightarrow[\sim]{} & \mathbb{V}(K^h) & \xrightarrow[\sim]{} & \mathbb{V}(K) \\ B_G & \mapsto & (\omega_B)_{|K^h(X)} & \mapsto & (\omega_B)_{|K(X)} \end{array}$$

La valoració trivial

$$\Gamma = \{0\} \implies \mathrm{Qcuts}(\Gamma) = \{-\infty = 0^-,\, 0,\, 0^+ = \infty^-\}$$

Si $K = \overline{K}$, l'espai $\mathbb{V}$ és:

$$\begin{array}{ccc}
 & & \vdots \\
 & & \bullet\ \mathrm{ord}_{X-a} \qquad (a \in K) \\
\bullet & \bullet & \bullet \\
\mathrm{ord}_{X^{-1}} = \omega_{-\infty} & \text{trivial} & \\
 & & \bullet \\
 & & \vdots
\end{array}$$

La valoració trivial

$$\Gamma = \{0\} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Qcuts}(\Gamma) = \{-\infty = 0^-,\, 0,\, 0^+ = \infty^-\}$$

Si $K = \overline{K}$, l'espai $\mathbb{V}$ és:

$\vdots$

$\bullet$ ord_{X-a} $\quad (a \in K)$

$\bullet$ $\mathrm{ord}_{X^{-1}} = \omega_{-\infty}$ $\quad$ $\bullet$ trivial $\quad$ $\bullet$

$\bullet$

$\vdots$

En general, com que $G = \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$, tenim $K = K^h$

Quan apliquem descens Galoisià reobtenim el resultat d'Ostrowski que trobem als llibres de text