Jacobianes generalitzades de corbes modulars

Mar Curcó Iranzo

Seminari dels cargols, Lleida

25 Octubre 2025

Varietats abelianes

Definició

Una varietat abeliana és una varietat algebraica projectiva llisa que també és un grup algebraic.

Varietats abelianes

Definició

Una varietat abeliana és una varietat algebraica projectiva llisa que també és un grup algebraic.

Example

Les corbes el·líptiques són varietats abelianes de dimensió 1.

Varietats abelianes

Definició

Una varietat abeliana és una varietat algebraica projectiva llisa que també és un grup algebraic.

Example

Les corbes el·líptiques són varietats abelianes de dimensió 1.

Example

Sigui C una corba algebraica llisa, $J(C)$, la varietat Jacobiana de C, és una varietat abeliana associada a C i tal que

$$C \hookrightarrow J(C), \qquad \text{(Abel-Jacobi)},$$

satisfent una propietat universal.

Teorema de Mordell-Weil

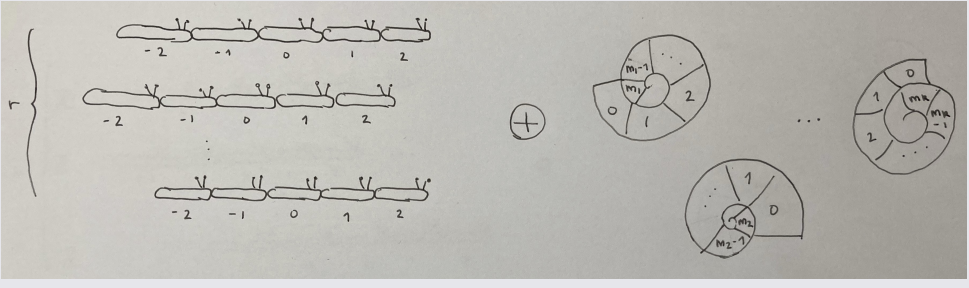
Sigui $A/\mathbb{Q}$ una varietat abeliana, tenim

$$A(\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}^r \oplus A(\mathbb{Q})_{\text{tor}}.$$

Teorema de Mordell-Weil

Sigui $A/\mathbb{Q}$ una varietat abeliana, tenim

$$A(\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}^r \oplus A(\mathbb{Q})_{\text{tor}}.$$



Teorema de Mordell-Weil

Sigui $A/\mathbb{Q}$ una varietat abeliana, tenim

$$A(\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}^r \oplus A(\mathbb{Q})_{\text{tor}}.$$

Pregunta

Donda $A/\mathbb{Q}$, podem determinar $A(\mathbb{Q})_{\text{tor}}$?

Teorema de Mordell-Weil

Sigui $A/\mathbb{Q}$ una varietat abeliana, tenim

$$A(\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}^r \oplus A(\mathbb{Q})_{\text{tor}}.$$

Pregunta

Donda $A/\mathbb{Q}$, podem determinar $A(\mathbb{Q})_{\text{tor}}$?

Teorema de Mordell-Weil

Sigui $A/\mathbb{Q}$ una varietat abeliana, tenim

$$A(\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}^r \oplus A(\mathbb{Q})_{\text{tor}}.$$

Pregunta

Donda $A/\mathbb{Q}$, podem determinar $A(\mathbb{Q})_{\text{tor}}$?

Per què?

- Tenir exemples
- Tenir classificacions (Corbes ellíptiques – Mazur).
- Si $A = J(C)$, llavors $A(\mathbb{Q})_{\text{tor}}$ conté informació sobre C.

Teorema de Mordell-Weil

Sigui $A/\mathbb{Q}$ una varietat abeliana, tenim

$$A(\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}^r \oplus A(\mathbb{Q})_{\text{tor}}.$$

Pregunta

Donda $A/\mathbb{Q}$, podem determinar $A(\mathbb{Q})_{\text{tor}}$?

Per què?

- Tenir exemples
- Tenir classificacions (Corbes ellíptiques – Mazur).
- Si $A = J(C)$, llavors $A(\mathbb{Q})_{\text{tor}}$ conté informació sobre C.

Avui : $A = J(C)$ on C és una corba modular.

La corba modular $X_0(N)$

Sigui $N \geq 1$ un nombre enter, prenem

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : c \equiv 0 \pmod{N} \right\},$$

i $X_0(N)/\mathbb{Q}$ com la **corba modular** associada al grup $\Gamma_0(N)$.

La corba modular $X_0(N)$

Sigui $N \geq 1$ un nombre enter, prenem

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : c \equiv 0 \pmod{N} \right\},$$

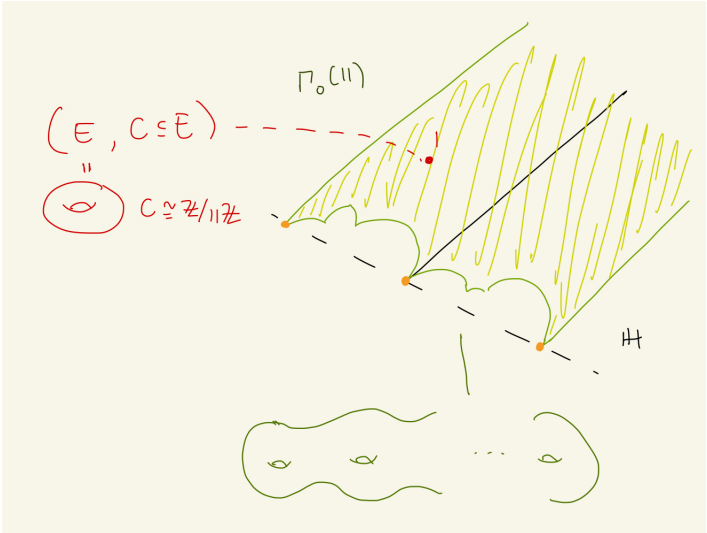
i $X_0(N)/\mathbb{Q}$ com la **corba modular** associada al grup $\Gamma_0(N)$.

$$X_0(N)/\mathbb{C} \simeq \underset{\downarrow}{\mathcal{H}/\,\Gamma_0(N)} \cup \underset{\downarrow}{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})/\Gamma_0(N)}$$

$$Y_0(N) \qquad \mathrm{Cusps}(X_0(N))$$

$X_0(N)$ és l'espai de moduli de $\{(E, C) : E/\mathbb{C}$ corba elliptica $, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \simeq C \subset E\}/\simeq$.

La corba modular $X_0(N)$



La varietat Jacobiana $J_0(N)$

Sigui $J_0(N) := \mathrm{Jac}(X_0(N)) = \mathrm{Pic}^0(X_0(N)) = \mathrm{Div}^0(X_0(N))/\sim$, on

$$\mathrm{Div}^0(X_0(N)) = \left\{ \sum_{P \in X_0(N)} a_P P : a_P \neq 0 \text{ per a un nombre finit de } P \text{ i } \sum_{P \in X_0(N)} a_P = 0 \right\},$$

i $\sim$ denota la relació d'equivalència

$$D_1 \sim D_2 \text{ si i només si hi ha una funció } f \in \mathbb{Q}(X_0(N)) \text{ amb } \mathrm{div}(f) = D_1 - D_2.$$

La varietat Jacobiana $J_0(N)$

Sigui $J_0(N) := \mathrm{Jac}(X_0(N)) = \mathrm{Pic}^0(X_0(N)) = \mathrm{Div}^0(X_0(N))/\sim$, on

$$\mathrm{Div}^0(X_0(N)) = \left\{ \sum_{P \in X_0(N)} a_P P : a_P \neq 0 \text{ per a un nombre finit de } P \text{ i } \sum_{P \in X_0(N)} a_P = 0 \right\},$$

i $\sim$ denota la relació d'equivalència

$$D_1 \sim D_2 \text{ si i només si hi ha una funció } f \in \mathbb{Q}(X_0(N)) \text{ amb } \mathrm{div}(f) = D_1 - D_2.$$

Pregunta

Podem determinar $J_0(N)(\mathbb{Q})_{\mathrm{tor}}$?

La conjectura d'Ogg

Tot $[D] \in J_0(N)$ amb $D \in \text{Div}^0_{\text{cusp}}(X_0(N))$ és de torsió. (Manin-Drinfeld, 1973)

La conjectura d'Ogg

Tot $[D] \in J_0(N)$ amb $D \in \text{Div}^0_{\text{cusp}}(X_0(N))$ és de torsió. (Manin-Drinfeld, 1973)
Sigui $N = p > 5$ primer,

Andrew Ogg: Tota la torsió racional de $J_0(N)$ ve de les cuspsides.

La conjectura d'Ogg

Tot $[D] \in J_0(N)$ amb $D \in \text{Div}^0_{\text{cusp}}(X_0(N))$ és de torsió. (Manin-Drinfeld, 1973)
Sigui $N = p > 5$ primer,

Andrew Ogg: Tota la torsió racional de $J_0(N)$ ve de les cuspsides.

Si N es primer, tenim $\text{Cusps}(X_0(N)) = \{0, \infty\} \subseteq X_0(N)(\mathbb{Q})$.

Conjectura d'Ogg (1975)

El grup

$$J_0(N)(\mathbb{Q})_{\text{tor}} \simeq \langle [0 - \infty] \rangle \simeq \mathbb{Z}/\text{num}\left(\frac{N-1}{12}\right)\mathbb{Z}$$

La conjectura d'Ogg

Tot $[D] \in J_0(N)$ amb $D \in \text{Div}^0_{\text{cusp}}(X_0(N))$ és de torsió. (Manin-Drinfeld, 1973)
Sigui $N = p > 5$ primer,

Andrew Ogg: Tota la torsió racional de $J_0(N)$ ve de les cuspsides.

Si N es primer, tenim $\text{Cusps}(X_0(N)) = \{0, \infty\} \subseteq X_0(N)(\mathbb{Q})$.

Conjectura d'Ogg (1975)

El grup

$$J_0(N)(\mathbb{Q})_{\text{tor}} \simeq \langle [0 - \infty] \rangle \simeq \mathbb{Z}/\text{num}\left(\frac{N-1}{12}\right)\mathbb{Z}$$

La demostració de la conjectura d'Ogg's: Mazur (1977).

Subgrup cuspidal

Definim $C_N := \mathbf{im}(\mathbf{Div}^0_{\mathbf{cusp}}(X_0(N))\ \mathbf{en}\ J_0(N)))$ com el **subgrup cuspidal**. Però en general $\text{Cusps}(X_0(N)) \not\subseteq X_0(N)(\mathbb{Q})$.

Subgrup cuspidal

Definim $C_N := \mathbf{im}(\mathbf{Div}^0_{\mathbf{cusp}}(X_0(N))$ **en** $J_0(N)))$ com el **subgrup cuspidal**. Però en general $\text{Cusps}(X_0(N)) \not\subseteq X_0(N)(\mathbb{Q})$.
Prenent $C_N(\mathbb{Q}) := C_N \cap J_0(N)(\mathbb{Q})$, una generalització natural de la conjectura d'Ogg's és

Conjectura generalitzada d'Ogg

Per a tot enter $N \geq 1$ tenim

$$J_0(N)(\mathbb{Q})_{\text{tor}} = C_N(\mathbb{Q}).$$

Subgrup cuspidal

Definim $C_N := \mathbf{im}(\mathbf{Div}^0_{\mathbf{cusp}}(X_0(N))$ **en** $J_0(N)))$ com el **subgrup cuspidal**. Però en general $\text{Cusps}(X_0(N)) \not\subseteq X_0(N)(\mathbb{Q})$.
Prenent $C_N(\mathbb{Q}) := C_N \cap J_0(N)(\mathbb{Q})$, una generalització natural de la conjectura d'Ogg's és

Conjectura generalitzada d'Ogg

Per a tot enter $N \geq 1$ tenim

$$J_0(N)(\mathbb{Q})_{\text{tor}} = C_N(\mathbb{Q}).$$

La conjectura sembla certa fins el dia d'avui! (Ling, Lorenzini, Otha, Luopian, Lui, Ren, Conrad-Edixhoven-Stein, Ribet-Wake ...)

Subgrup cuspidal

Teorema (Yoo, 2019, 2021)

Per a tot enter $N \geq 1$ i per a tot primer senar ℓ tal que ℓ^2 no divideix $3N$, tenim

$$J_0(N)(\mathbb{Q})_{\text{tor}}[\ell^\infty] \simeq \left(\bigoplus_{d \in D_1(N)} \langle [Z_\ell(d)] \rangle\right)[\ell^\infty]$$

per certs divisors $\{[Z_\ell(d)] \in C_N(\mathbb{Q}) : d \in D_1(N)\}$, on $D_1(N) := \{\text{divisors of N}\} \setminus \{1\}$.

Els divisors $Z_\ell(d)$ i els seus ordres són explicits.

Subgrup cuspidal

Teorema (Yoo, 2019, 2021)

Per a tot enter $N \geq 1$ i per a tot primer senar ℓ tal que ℓ^2 no divideix $3N$, tenim

$$J_0(N)(\mathbb{Q})_{\text{tor}}[\ell^\infty] \simeq \left(\bigoplus_{d \in D_1(N)} \langle [Z_\ell(d)] \rangle\right)[\ell^\infty]$$

per certs divisors $\{[Z_\ell(d)] \in C_N(\mathbb{Q}) : d \in D_1(N)\}$, on $D_1(N) := \{\text{divisors of N}\} \setminus \{1\}$.

Els divisors $Z_\ell(d)$ i els seus ordres són explicits.

Example

Sigui $N = pq$ i ℓ tal que $\text{val}_\ell(p-1) \leq \text{val}_\ell(q-1)$. Llavors $D_1(N) = \{p, q, pq\}$ i

- $Z_\ell(p) = (q-p)0 - (q-1)P_p + (p-1)P_q$ amb ordre $\text{num}\left(\frac{(p-1)(q^2-1)}{24}\right)$.
- $Z_\ell(q) = 0 - P_q$ amb ordre $\text{num}\left(\frac{(p^2-1)(q-1)}{24}\right)$.
- $Z_\ell(pq) = q0 - qP_p + P_q - \infty$ amb ordre $\text{num}\left(\frac{(p-1)(q-1)\gcd(p+1,q+1)}{24\gcd(p-1,q-1)}\right)$.

Generalised Jacobians

Jacobianes generalitzades

Les Jacobianes ens ajuden a explorar les corbes llises.

Generalised Jacobians

Jacobianes generalitzades

Les Jacobianes generalitzades ens ajuden a explorar certes corbes singulars.

Generalised Jacobians

Les Jacobianes generalitzades ens ajuden a explorar certes corbes singulars.

Sigui $\mathbf{m} \in \mathrm{Div}(X_0(N))$ un divisor racional i efectiu (un **modulus**).
Construïm $X_0(N)_{\mathbf{m}}$, la corba singular obtinguda a partir de $X_0(N)$ "enganxant" els punts de $\mathbf{m}$ en un sol punt singular Q.

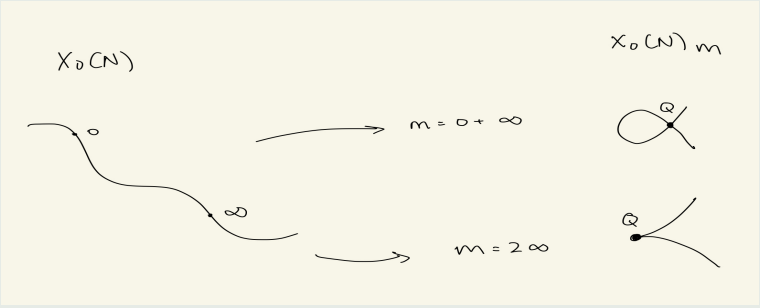
Generalised Jacobians

Jacobianes generalitzades

Les Jacobianes generalitzades ens ajuden a explorar certes corbes singulars.

Sigui $\mathbf{m} \in \mathrm{Div}(X_0(N))$ un divisor racional i efectiu (un **modulus**).
Construïm $X_0(N)_{\mathbf{m}}$, la corba singular obtinguda a partir de $X_0(N)$ "enganxant" els punts de $\mathbf{m}$ en un sol punt singular Q.

Example



Jacobianes generalitzades

Definition

La Jacobiana generalitzada $J_0(N)_{\mathbf{m}}$ és el grup de feixos de línies de grau zero sobre $X_0(N)_{\mathbf{m}}$ llevat d'isomorfismes.

Jacobianes generalitzades

Definition

La Jacobiana generalitzada $J_0(N)_{\mathbf{m}}$ és el grup de feixos de línies de grau zero sobre $X_0(N)_{\mathbf{m}}$ llevat d'isomorfismes.

Propietats

Sigui M un conjunt de punts de $X_0(N)$, hi ha un modulus $\mathbf{m}$ amb $M = \mathrm{Supp}(\mathbf{m})$, i una aplicació

$$\iota_{\mathbf{m}} : X_0(N) \setminus M \to J_0(N)_{\mathbf{m}}$$

satisfent una propietat universal.

Jacobianes generalitzades

Definition

La Jacobiana generalitzada $J_0(N)_{\mathbf{m}}$ és el grup de feixos de línies de grau zero sobre $X_0(N)_{\mathbf{m}}$ llevat d'isomorfismes.

Propietats

Sigui $\mathrm{Div}^0_{\mathbf{m}}(X_0(N))$ el conjunt de divisors coprimers amb $\mathbf{m}$. La Jacobiana generalitzada $J_0(N)_{\mathbf{m}}$ és

$$J(X)_{\mathbf{m}} = \mathrm{Div}^0_{\mathbf{m}}(X_0(N))/\sim_{\mathbf{m}}.$$

on $\sim_{\mathbf{m}}$ denota la relació d'equivalència

$$D_1 \sim_{\mathbf{m}} D_2 \text{ si i només si hi ha una funció } f \text{ amb } \mathrm{div}(f) = D_1 - D_2 \text{ i } f \equiv 1 \pmod{\mathbf{m}}.$$

Això ens dona

$$0 \to L_{\mathbf{m}} \to J_0(N)_{\mathbf{m}} \to J_0(N) \to 0 \qquad (*)$$

El grup lineal $L_{\mathbf{m}}$ és isomòrfic al producte de copies de $\mathbb{G}_m$'s i $\mathbb{G}_a$'s.

Això ens dona

$$0 \to L_{\mathbf{m}} \to J_0(N)_{\mathbf{m}} \to J_0(N) \to 0 \qquad (*)$$

El grup lineal $L_{\mathbf{m}}$ és isomòrfic al producte de copies de $\mathbb{G}_m$'s i $\mathbb{G}_a$'s.

$J_0(N)_{\mathbf{m}}$ no és una varietat abeliana!

Això ens dona

$$0 \to L_{\mathbf{m}} \to J_0(N)_{\mathbf{m}} \to J_0(N) \to 0 \qquad (*)$$

El grup lineal $L_{\mathbf{m}}$ és isomòrfic al producte de copies de $\mathbb{G}_m$'s i $\mathbb{G}_a$'s.

$J_0(N)_{\mathbf{m}}$ no és una varietat abeliana!

Però $J_0(N)_{\mathbf{m}}(\mathbb{Q})_{\text{tor}}$ és finit.

Això ens dona

$$0 \to L_{\mathbf{m}} \to J_0(N)_{\mathbf{m}} \to J_0(N) \to 0 \qquad (*)$$

El grup lineal $L_{\mathbf{m}}$ és isomòrfic al producte de copies de $\mathbb{G}_m$'s i $\mathbb{G}_a$'s.

$J_0(N)_{\mathbf{m}}$ no és una varietat abeliana!

Però $J_0(N)_{\mathbf{m}}(\mathbb{Q})_{\text{tor}}$ és finit.

Qué podem dir de $J_0(N)_{\mathbf{m}}(\mathbb{Q})_{\text{tor}}$?

Això ens dona

$$0 \to L_{\mathbf{m}} \to J_0(N)_{\mathbf{m}} \to J_0(N) \to 0 \qquad (*)$$

El grup lineal $L_{\mathbf{m}}$ és isomòrfic al producte de copies de $\mathbb{G}_m$'s i $\mathbb{G}_a$'s.

$J_0(N)_{\mathbf{m}}$ no és una varietat abeliana!

Però $J_0(N)_{\mathbf{m}}(\mathbb{Q})_{\text{tor}}$ és finit.

Qué podem dir de $J_0(N)_{\mathbf{m}}(\mathbb{Q})_{\text{tor}}$?

D'ara en endavant fixem $\mathbf{m} = \sum_{P \in \text{Cusps}(X_0(N))} P$.

Main result

Teorema (2023)

Sigui N un enter positiu senar. Per a tot primer senar ℓ tal que ℓ^2 no divideixi $3N$ podem construïr divisors $E_\ell(d) \in \mathrm{Div}^0_{\mathrm{cusp}}(X_0(N))$ tal que

$$J_0(N)_{\mathbf{m}}(\mathbb{Q})_{\mathrm{tor}}[\ell^\infty] \simeq \left(\bigoplus_{d \in D_2(N)} \langle [E_\ell(d)] \rangle\right)[\ell^\infty]$$

on $D_2(N) = \{d|N,\ \text{divisible per almenys 2 primers}\}$.

Extent resultats de Yamazaki-Yang (2016) i Wei-Yamazaki (2019).

Main result

Teorema (2023)

Sigui N un enter positiu senar. Per a tot primer senar ℓ tal que ℓ^2 no divideixi $3N$ podem construïr divisors $E_\ell(d) \in \mathrm{Div}^0_{\mathrm{cusp}}(X_0(N))$ tal que

$$J_0(N)_{\mathbf{m}}(\mathbb{Q})_{\mathrm{tor}}[\ell^\infty] \simeq \left(\bigoplus_{d\in D_2(N)} \langle [E_\ell(d)]\rangle\right)[\ell^\infty]$$

on $D_2(N) = \{d|N,\ \text{divisible per almenys 2 primers}\}$.

Example

Sigui $N = p^2q$. Llavors $D_2(N) = \{pq, p^2q\}$ i

- $E_\ell(pq) = (q+1)Z_\ell(p) - Z_\ell(pq)$ i amb ordre num $\left(\frac{(p-1)(q-1)}{24}\right)$;
- $E_\ell(p^2q) = (q+1)Z_\ell(p^2) - Z_\ell(p^2q)$ i amb ordre num $\left(\frac{(p^2-1)(q-1)}{24}\right)$.

Main result

Teorema (2023)

Sigui N un enter positiu senar. Per a tot primer senar ℓ tal que ℓ^2 no divideixi $3N$ podem construïr divisors $E_\ell(d) \in \mathrm{Div}^0_{\mathrm{cusp}}(X_0(N))$ tal que

$$J_0(N)_{\mathbf{m}}(\mathbb{Q})_{\mathrm{tor}}[\ell^\infty] \simeq \left(\bigoplus_{d \in D_2(N)} \langle [E_\ell(d)] \rangle\right)[\ell^\infty]$$

on $D_2(N) = \{d|N,\ \text{divisible per almenys 2 primers}\}$.

Demostració (idea):

$$0 \to L_{\mathbf{m}} \to J_0(N)_{\mathbf{m}} \to J_0(N) \to 0$$

Main result

Teorema (2023)

Sigui N un enter positiu senar. Per a tot primer senar ℓ tal que ℓ^2 no divideixi $3N$ podem construïr divisors $E_\ell(d) \in \mathrm{Div}^0_{\mathrm{cusp}}(X_0(N))$ tal que

$$J_0(N)_{\mathbf{m}}(\mathbb{Q})_{\mathrm{tor}}[\ell^\infty] \simeq \left(\bigoplus_{d\in D_2(N)} \langle [E_\ell(d)]\rangle\right)[\ell^\infty]$$

on $D_2(N) = \{d|N,\ \text{divisible per almenys 2 primers}\}$.

Proof (idea):

$$0 \to L_{\mathbf{m}} \to J_0(N)_{\mathbf{m}} \to J_0(N) \to 0$$

$$0 \to \bigoplus_{d'|N} (\mathbb{Q}(\zeta_{(N,d')})^\times)_{\mathrm{tor}} \to J_0(N)_{\mathbf{m}}(\mathbb{Q})_{\mathrm{tor}} \to J_0(N)(\mathbb{Q})_{\mathrm{tor}} \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{d'|N} \mathbb{Q}(\zeta_{(N,d')})^\times \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Main result

Demostració (idea):

$$0 \to \bigoplus_{d' \mid N} (\mathbb{Q}(\zeta_{(N,d')})^\times)_{\text{tor}} \to J_0(N)_{\mathbf{m}}(\mathbb{Q})_{\text{tor}} \to J_0(N)(\mathbb{Q})_{\text{tor}} \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{d' \mid N} \mathbb{Q}(\zeta_{(N,d')})^\times \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Main result

Demostració (idea):

$$0 \to \bigoplus_{d'|N} (\mathbb{Q}(\zeta_{(N,d')})^\times)_{\text{tor}} \to J_0(N)_{\mathbf{m}}(\mathbb{Q})_{\text{tor}} \to J_0(N)(\mathbb{Q})_{\text{tor}} \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{d'|N} \mathbb{Q}(\zeta_{(N,d')})^\times \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

1. (Yamazaki-Yang) Si $D \in \text{Div}^0_{\text{cusp}}(X_0(N))$ amb $m \cdot D = \text{div}(f)$ per algun $m \in \mathbb{Z}$, llavors

$$\delta([D]) = \left(c_{d'}(f) \cdot c_N(f)^{-1}\right)_{d'|N, d' \neq N} \otimes \frac{1}{m}.$$

Main result

Demostració (idea):

$$0 \to \bigoplus_{d'|N} (\mathbb{Q}(\zeta_{(N,d')})^\times)_{\text{tor}} \to J_0(N)_{\mathbf{m}}(\mathbb{Q})_{\text{tor}} \to J_0(N)(\mathbb{Q})_{\text{tor}} \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{d'|N} \mathbb{Q}(\zeta_{(N,d')})^\times \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

1. (Yamazaki-Yang) Si $D \in \text{Div}^0_{\text{cusp}}(X_0(N))$ amb $m \cdot D = \text{div}(f)$ per algun $m \in \mathbb{Z}$, llavors

$$\delta([D]) = \left(c_{d'}(f) \cdot c_N(f)^{-1}\right)_{d'|N, d' \neq N} \otimes \frac{1}{m}.$$

2. Determinar $\delta([Z_\ell(d)])$ per a tot $d \in D_1(N)$ utilitzant unitats modulars: quocients eta.

Main result

Demostració (idea):

$$0 \to \bigoplus_{d'|N} (\mathbb{Q}(\zeta_{(N,d')})^\times)_{\text{tor}} \to J_0(N)_{\mathbf{m}}(\mathbb{Q})_{\text{tor}} \to J_0(N)(\mathbb{Q})_{\text{tor}} \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{d'|N} \mathbb{Q}(\zeta_{(N,d')})^\times \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

1. (Yamazaki-Yang) Si $D \in \text{Div}^0_{\text{cusp}}(X_0(N))$ amb $m \cdot D = \text{div}(f)$ per algun $m \in \mathbb{Z}$, llavors

$$\delta([D]) = \left(c_{d'}(f) \cdot c_N(f)^{-1}\right)_{d'|N, d' \neq N} \otimes \frac{1}{m}.$$

2. Determinar $\delta([Z_\ell(d)])$ per a tot $d \in D_1(N)$ utilitzant unitats modulars: quocients eta.
3. Buscar relacion entre $\{\delta([Z_\ell(d)])\}_{d \in D_1(N)}$ i trobar generadors de $\ker(\delta)$.

Main result

Demostració (idea):

$$0 \to \bigoplus_{d'|N} (\mathbb{Q}(\zeta_{(N,d')})^\times)_{\text{tor}} \to J_0(N)_{\mathbf{m}}(\mathbb{Q})_{\text{tor}} \to J_0(N)(\mathbb{Q})_{\text{tor}} \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{d'|N} \mathbb{Q}(\zeta_{(N,d')})^\times \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

1. (Yamazaki-Yang) Si $D \in \text{Div}^0_{\text{cusp}}(X_0(N))$ amb $m \cdot D = \text{div}(f)$ per algun $m \in \mathbb{Z}$, llavors

$$\delta([D]) = \left(c_{d'}(f) \cdot c_N(f)^{-1}\right)_{d'|N, d' \neq N} \otimes \frac{1}{m}.$$

2. Determinar $\delta([Z_\ell(d)])$ per a tot $d \in D_1(N)$ utilitzant unitats modulars: quocients eta.
3. Buscar relacion entre $\{\delta([Z_\ell(d)])\}_{d \in D_1(N)}$ i trobar generadors de $\ker(\delta)$.
4. Contruïr una base $E_\ell(d)$ per $\ker(\delta)$ sobre $\mathbb{Z}_\ell$.

Main result

Demostració (idea):

$$0 \to \bigoplus_{d'|N} (\mathbb{Q}(\zeta_{(N,d')})^\times)_{\text{tor}} \to J_0(N)_{\mathbf{m}}(\mathbb{Q})_{\text{tor}} \to J_0(N)(\mathbb{Q})_{\text{tor}} \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{d'|N} \mathbb{Q}(\zeta_{(N,d')})^\times \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

1. (Yamazaki-Yang) Si $D \in \text{Div}^0_{\text{cusp}}(X_0(N))$ amb $m \cdot D = \text{div}(f)$ per algun $m \in \mathbb{Z}$, llavors

$$\delta([D]) = \left(c_{d'}(f) \cdot c_N(f)^{-1}\right)_{d'|N, d' \neq N} \otimes \frac{1}{m}.$$

2. Determinar $\delta([Z_\ell(d)])$ per a tot $d \in D_1(N)$ utilitzant unitats modulars: quocients eta.
3. Buscar relacion entre $\{\delta([Z_\ell(d)])\}_{d \in D_1(N)}$ i trobar generadors de $\ker(\delta)$.
4. Contruïr una base $E_\ell(d)$ per $\ker(\delta)$ sobre $\mathbb{Z}_\ell$.
5. Derterminar order$([E_\ell(d)])$ per a tot $d \in D_2(N)$.

Drinfeld result

Si treballem sobre $\mathbb{F}_q(T)$, on $q = p^r$, tenim:

$\mathbb{Q}$	$\mathbb{F}_q(T)$
Elliptic curves	rank 2 Drinfeld modules
p prime	$\mathfrak{p} \in \mathbb{F}_q[T]$ irreductible i mònic
N enter	$\mathfrak{n} \in \mathbb{F}_q[T]$ mònic
$\mathbb{H}$ semiplà superior de Poincaré	Ω semiplà superior de Drinfeld
$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$	$\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[T])$
$\Gamma_0(N)$	$\Gamma_0(\mathfrak{n})$
$X_0(N)$	$X_0(\mathfrak{n})$
$J_0(N)_{(\mathbf{m})}$	$J_0(\mathfrak{n})_{(\mathbf{m})}$

Teorema (2024)

Si $\mathfrak{n} = \mathfrak{p}^k$, aleshores $J_0(\mathfrak{n})_{\mathbf{m}}[\ell^\infty]$ és trivial per a tot primer $\ell \nmid q(q^2-1)$.

Recerca futura i en curs

- Conjectura generalitzada d'Ogg: Que pass amb $\ell = 2$? Que passa amb altres corbes modulars? Que passa sobre altres cossos de nombres?
- Els revestiments finits i abelians de $X_0(N)$ ramificats a Supp($\mathbf{m}$) es corresponent 1-to-1 amb les isogenies sobre les Jacobianes generalitzades $J_0(N)_{\mathbf{m}}$. Revestiments geometricament màxims?

Gràcies!